



# EQUACIONAMENTO DE ERROS EM MM3C UTILIZANDO OS MÉTODOS: GEOMÉTRICO E TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

*Benedito Di Giacomo*<sup>1</sup>, *César Augusto Galvão de Moraes*<sup>2</sup>, *Luiz Carlos Neves*<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidade de São Paulo - Depto Engenharia Mecânica - Escola de Eng. de São Carlos, São Carlos, Brazil, bgiacom@sc.usp.br

<sup>2</sup> Universidade de São Paulo - Depto Engenharia Mecânica - Escola de Eng. de São Carlos, São Carlos, Brazil, cesarmorais@sc.usp.br

<sup>3</sup> Universidade de São Paulo - Depto Engenharia Mecânica - Escola de Eng. de São Carlos, São Carlos, Brazil, lucneves@sc.usp.br

**Resumo:** Este trabalho teve como objetivo apresentar os métodos: geométrico e transformações homogêneas, para a sintetização teórica de erros em MM3C (Máquinas de Medir em três Coordenadas). Comparou-se os métodos avaliando as equações de erros geradas. Notou-se que o método das transformações homogêneas é uma forma conveniente e prática de sintetização de erros.

**Palavras chave:** máquinas de medir a três coordenadas MM3C, erro volumétrico, análise geométrica, transformações homogêneas.

## 1. INTRODUÇÃO

A economia mundial, cada vez mais competitiva, impulsiona e acelera o desenvolvimento tecnológico na busca pela redução dos custos de fabricação e melhoria da qualidade, tendo como consequência a evolução dos processos produtivos. Devido à acentuada concorrência e exigência de melhorias na produção da indústria mecânica em virtude do grande número de empresas do setor e também da exigência de altíssima qualidade do mercado sobre produtos manufaturados, destaca-se cada vez mais a necessidade de um sofisticado controle de qualidade na produção, sendo este mais rápido, prático e confiável, evidenciando maior a utilização e da sintetização dos erros provenientes de uma MM3C (Máquina de Medir por Três Coordenadas). A MM3C é capaz de fazer medições confiáveis de forma rápida e flexível, porém, como toda máquina está suscetível a erros geométricos devido a sua dinâmica de ação e também a erros provenientes de fontes externas os quais introduzem desta forma valores errôneos em sua resposta de leitura. Os erros da MM3C são responsáveis pela diminuição da acuracidade na verificação dimensional em peças manufaturadas sendo indispensável o conhecimento destes erros para um controle dimensional adequado.

Classificou-se os erros geométricos em um determinado volume de trabalho de uma máquina de medir por coordenadas como erros provocados devido aos movimentos indesejáveis de: rotações (roll, pitch e yaw) e translações (erros de retilinearidade e posição) além dos erros de ortogonalidade entre os três eixos da máquina (DI GIACOMO, 1986).

Nas últimas décadas, com o intuito de facilitar o conhecimento da magnitude do erro em MM3C, inúmeros autores propuseram técnicas de sintetização teórica de erros. Foram analisadas as estruturas das MM3C's e utilizando ferramentas matemáticas, conseguiram equacionar os erros presentes durante a sua operação.

Os autores DENAVIT e HARTENBERG (1955) utilizaram o modelo matricial de transformações homogêneas em um estudo aplicado à cinemática de corpos rígidos, permitindo conhecer a posição final de um corpo após ser submetido a um deslocamento através de operações matriciais. PAUL (1981) utilizou as transformações homogêneas em corpos rígidos quando aplicou esta técnica em um sistema robótico. O autor permitiu conhecer a posição final de um corpo rígido através das multiplicações de matrizes de translações e rotações de seus consecutivos movimentos. Este estudo do autor facilitou entender o comportamento espacial de componentes mecânicos em movimento e dentre estes a MM3C.

DI GIACOMO (1986) e LIM e BURDEKIN (2002) empregaram o método geométrico para sintetização de erros da MM3C quando analisaram estruturalmente a máquina para definir os seus erros presentes durante o seu deslocamento. Desta forma, os autores realizaram o equacionamento dos 21 erros geométricos nas direções preferenciais X, Y, Z da máquina de medir por três coordenadas.

Estudou-se em 2008 a utilização do método das transformações homogêneas para calibração de um braço articulado de medição no qual foi possível equacionar erros geométricos ocasionados durante a sua operação (SANTOLARIA et al., 2008).

ORREGO (1999) e CARDOZA (1995) fizeram análise do erro volumétrico em MM3C do tipo ponte móvel ao aplicar o método matricial das transformações homogêneas. Os autores apresentaram equações de erros semelhantes as encontradas com a análise geométrica.

## 2. OBJETIVOS

Este trabalho teve o objetivo de apresentar e comparar métodos de análise geométrica e de transformações homogêneas para o equacionamento de erros nas direções preferenciais em uma MM3C do tipo ponte móvel.

### 3. METODOLOGIA

No estudo do equacionamento de erros da MM3C, utilizou-se uma máquina de medir em três coordenadas do tipo ponte móvel da marca Brown & Sharpe. Na análise geométrica e de transformações homogêneas para o equacionamento de erros da MM3C foi adotado um diagrama, estabelecido na figura (1) que representa os sistema de coordenadas de referência e a estrutura da máquina. O diagrama ilustrado na figura (1) também apresenta as guia móveis que deslizam nas direções x, y, e z. O sistema de coordenadas adotado é o mesmo sistema de coordenadas convencionado pela máquina.

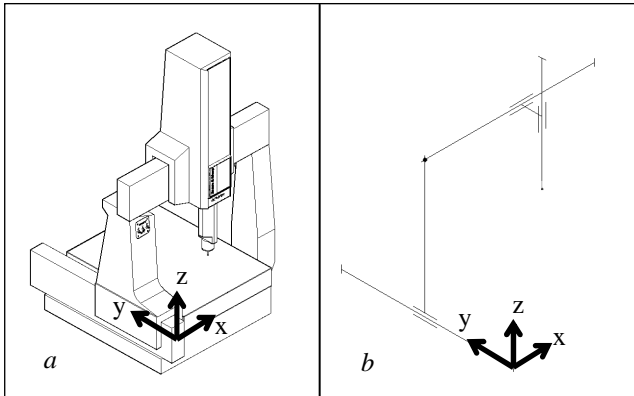


Fig. 1. MM3C do tipo ponte móvel (a) e diagrama da MM3C (b)

As nomenclaturas e simbologias adotadas dos erros geométricos analisados e as nomenclaturas das regiões da MM3C com os planos adotados durante a sintetização de erros estão representados na tabela (1) e figura (2) respectivamente.

Tabela 1. Nomenclatura e simbologia adotada para os erros analisados

Definições preliminares da nomenclatura usada durante a análise de erros	
$\delta u(v)$	Erro de posição na direção $u$ devido ao movimento na direção $v$
$\delta\theta u(v)$	Movimento angular em torno da direção $u$ devido ao movimento na direção $v$
$\delta\theta_{wo}$	Desvio de ortogonalidade entre os eixos perpendiculares à direção $w$
$\text{sen } \delta\theta = \delta\theta$ $\text{cos } \delta\theta = 1$	Considerações devido a deslocamentos infinitesimais angulares

Fonte: DI GIACOMO (1986)

#### 3.1. Aplicação do método da análise Geométrica para sintetização de Erros.

Para a análise geométrica dos erros angulares, aplicou-se o estudo de relações de seno e cosseno nas rotações (roll, pitch e yaw) e também nos possíveis erros de ortogonalidade entre os eixos dos componentes da MM3C que resultam em deslocamento indesejado da ponta sonda de medição. O levantamento dos erros angulares foi realizado para os três planos de análise (xz, xy e yz). Considerou-se os centros de rotações coincidentes aos centros dos mancais aerostáticos possibilitando desta forma conhecer as componentes lineares dos erros nas direções preferenciais X, Y e Z. A somatória das componentes de erro encontrada em uma determinada direção preferencial é considerada o próprio erro correspondente a respectiva direção analisada.

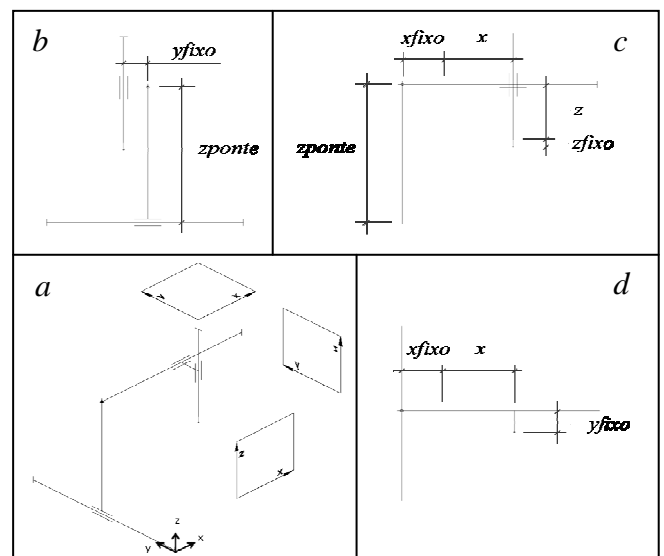


Figura 2: Definição dos planos da MM3C (a); Vista lateral direita do diagrama proposto, plano "yz" (b); Vista frontal do diagrama, plano "xz" (c); Vista superior do diagrama, plano "xy" (d).

#### 3.2. Aplicação do método das Transformações Homogêneas para sintetização de Erros.

Para se encontrar o erro nas direções preferenciais "x", "y" e "z" utilizando a teoria das transformações homogêneas foi feita uma abordagem vetorial para análise, onde o vetor erro  $\vec{E}_v$  é a diferença entre o vetor que liga o sistema de origem da máquina até a ponta da sonda (caminho sem erro representado pelo vetor  $\vec{Maq}$ ) e o vetor que une a origem da máquina até a ponta da sonda após ter deslocamentos indesejados (caminho com erro, representado pelo vetor  $\vec{VetMaq}$ ). As coordenadas do vetor erro  $\vec{E}_v$ , são os próprios erros agrupados nas direções "x", "y" e "z", ou seja, são as próprias equações de erro nas direções "x", "y" e "z".

O método matricial das transformações homogêneas foi utilizado realizando o produto das matrizes

encontradas para os movimentos de rotações e translações da MM3C. Neste método foram aplicados sistemas de coordenadas em pontos onde se tem a intersecção dos eixos da máquina e também nos centros dos mancais aerostáticos que permitem os movimentos, permitindo desta forma analisar e montar a matriz de transformações homogêneas em seções.

A abordagem vetorial, os sistemas de coordenadas e a nomenclatura utilizada para análise de erros com transformações homogêneas estão ilustrados na figura (3).

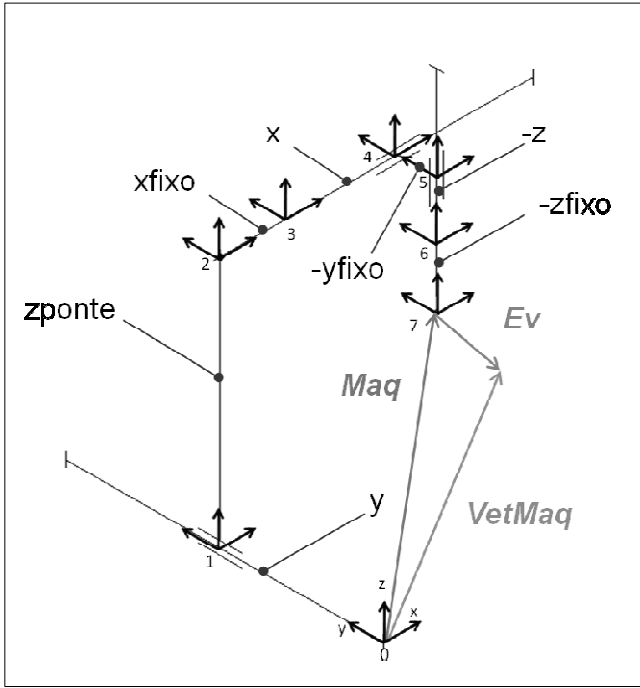


Fig. 3. Diagrama explicativo da nomenclatura adotada, posicionamento dos sistemas de coordenadas e da abordagem vetorial utilizada.

Com a análise estrutural e dinâmica da MM3C foram elaboradas as matrizes de transformações homogêneas para se conhecer as coordenadas dos deslocamentos indesejados em relação ao sistema anterior. Para encontrar os deslocamentos indesejados totais nas direções preferenciais foi feito o produto de todas as matrizes de transformações homogêneas encontradas. A matriz erro geral, demonstrada pela equação (1), foi utilizada para determinação das matrizes de erros angulares, de retilidade e posição propriamente dita. Esta matriz foi aplicada em todas as transformações dos sistemas de coordenadas, porém tomando-se o cuidado em preenchê-la corretamente com a característica de erro apontada em cada posição de análise.

$$M_{erro} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(v) & \delta\theta_y(v) & \delta x(v) \\ \delta\theta_z(v) & 1 & -\delta\theta_z(v) & \delta y(v) \\ -\delta\theta_y(v) & \delta\theta_x(v) & 1 & \delta z(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

A partir da abordagem vetorial representada na figura (3), o vetor erro foi determinado pela equação (2).

$$\vec{Ev} = \vec{VetMaq} - \vec{Maq} \quad (2)$$

No método de transformações homogêneas para a obtenção das matrizes que determinam o vetor  $\vec{VetMaq}$  e o  $\vec{Ev}$  vetor erro foi utilizado o software Matlab na versão 7.10.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A sintetização de erros através da análise geométrica da MM3C, permitiu encontrar as parcelas de erros expressas na tabela (2). As contribuições de erro de segunda ordem foram desconsideradas segundo (DI GIACOMO,1986).

Tabela 2. Parcelas de erro obtidas pela análise geométrica.

Direção "x"	Direção "y"	Direção "z"
$\Delta x = \delta\theta_y(y) \times (z_{ponte} - z - z_{fixo})$	$\Delta y = \delta\theta_z(y) \times (x + x_{fixo})$	$\Delta z = -\delta\theta_y(y) \times (x + x_{fixo})$
$\Delta x = -\delta\theta_y(x) \times (z + z_{fixo})$	$\Delta y = \delta\theta_z(x) \times (x + x_{fixo})$	$\Delta z = -\delta\theta_x(x) \times y_{fixo}$
$\Delta x = -\delta\theta_y(z) \times (z + z_{fixo})$	$\Delta y = \delta\theta_x(x) \times (z + z_{fixo})$	$\Delta z = -\delta\theta_x(y) \times y_{fixo}$
$\Delta x = -\delta\theta_y(x) \times (z + z_{fixo})$	$\Delta y = -\delta\theta_x(y) \times (z_{ponte} - z - z_{fixo})$	-
$\Delta x = \delta\theta_z(y) \times (y_{fixo})$	$\Delta y = \delta\theta_x(z) \times (z + z_{fixo})$	-
$\Delta x = \delta\theta_z(x) \times y_{fixo}$	$\Delta y = \delta\theta_x(x) \times (z + z_{fixo})$	-
$\Delta x = \delta\theta_z(x) \times (y_{fixo})$	-	-

Através da análise estrutural e com a teoria das transformações homogêneas, as matrizes que representam o caminho sem erro e o caminho com erro propostos pela abordagem vetorial foram expressos pelas equações (3) e (4) respectivamente.

$$Maq = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x + x_{fixo} \\ 0 & 1 & 0 & y + y_{fixo} \\ 0 & 0 & 1 & z_{ponte} - z - z_{fixo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$VetMaq = {}^0T_1 \times {}^1T_2 \times {}^2T_3 \times {}^3T_4 \times {}^4T_5 \times {}^5T_6 \times {}^6T_7 \quad (4)$$

A análise estrutural e dinâmica da MM3C determinou que as matrizes de transformações homogêneas das seções analisadas sejam expressas pelas equações (5), (6), (7), (8), (9), (10) e (11).

$$[{}^0T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(y) & \delta\theta_y(y) & \delta x(y) \\ \delta\theta_z(y) & 1 & -\delta\theta_x(y) & \delta y(y) \\ -\delta\theta_y(y) & \delta\theta_x(y) & 1 & \delta z(y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$[{}^1T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_{ponte} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(z) & \delta\theta_y(z) & \delta x(z) \\ \delta\theta_z(z) & 1 & -\delta\theta_x(z) & \delta y(z) \\ -\delta\theta_y(z) & \delta\theta_x(z) & 1 & \delta z(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$[{}^2T_3] = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_{zo} & 0 & 0 \\ \delta\theta_{zo} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{fixo} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[{}^3T_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_z(x) & \delta\theta_y(x) & \delta x(x) \\ \delta\theta_z(x) & 1 & -\delta\theta_x(x) & \delta y(x) \\ -\delta\theta_y(x) & \delta\theta_x(x) & 1 & \delta z(x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$[{}^4T_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_{fixo} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[{}^5T_6] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\theta_{yo} & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta_{xo} & 0 \\ -\delta\theta_{yo} & \delta\theta_{xo} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(z) & \delta\theta_y(z) & \delta x(z) \\ \delta\theta_z(z) & 1 & -\delta\theta_x(z) & \delta y(z) \\ -\delta\theta_y(z) & \delta\theta_x(z) & 1 & \delta z(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$[{}^6T_7] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_{fixo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Como análise dos erros no trabalho foi feita em relação as direções preferenciais da máquina de medir, então reduzimos a matriz *VetMaq* e *Maq* em matrizes coluna, pois apenas a ultima coluna é composta por elementos de erro nas direções preferenciais. Foi mantida em ambas matrizes a ultima coluna e fazendo diferença entre elas foi possível encontrar a matriz *Ev*, onde suas coordenadas são *Ex*, *Ey* e *Ez*.

A partir das metodologias de análise geométrica e de transformações homogêneas para sintetização de erros em MM3C e após desconsiderar os erros de segunda ordem segundo DI GIACOMO (1986) foi possível obter as equações de erro nas direções “x”, “y” e “z” (12), (13) e (14) respectivamente. Assim, as equações de erros nas direções preferenciais da MM3C estão descritas a seguir:

$$Ez = -\delta\theta_y(y) \times (x + x_{fixo}) - \delta\theta_x(x) \times y_{fixo} - \delta\theta_z(z) \times y_{fixo} + \delta x(x) + \delta x(y) + \delta x(z) \quad (12)$$

$$Ey = \delta\theta_z(z) \times (x + x_{fixo}) + \delta\theta_x(x) \times (x + x_{fixo}) + \delta\theta_y(y) \times (z + z_{fixo}) + \delta\theta_z(z) \times (z + z_{fixo}) + \delta\theta_x(x) \times (z + z_{fixo}) + \delta\theta_y(y) \times (z + z_{fixo}) + \delta y(x) + \delta y(y) + \delta y(z) \quad (13)$$

$$Ex = \delta\theta_y(y) \times (z + z_{fixo}) - \delta\theta_x(x) \times (z + z_{fixo}) - \delta\theta_z(z) \times (z + z_{fixo}) + \delta\theta_y(y) \times (z + z_{fixo}) + \delta\theta_x(x) \times (y_{fixo}) + \delta\theta_z(z) \times (y_{fixo}) + \delta x(x) + \delta x(y) + \delta x(z) \quad (14)$$

Nota se que os métodos aplicados apresentaram resultados semelhantes no equacionamento dos erros desconsiderando os erros de segunda ordem.

## 5. CONCLUSÕES

Devido o crescimento industrial são imprescindíveis equipamentos que verifiquem a qualidade da produção de peças manufaturadas de maneira precisa e ágil. Portanto se desenvolveu formas de constatação da qualidade de máquinas de medir por coordenadas.

Com este trabalho foi verificado que o método de análise geométrica e de transformações homogêneas foram capazes de equacionar erros de uma MM3C. Os métodos de equacionar os erros apresentados permitem com a sua quantificação através da calibração conhecer a contribuição individual de erro em cada direção analisada. A aplicação das transformações homogêneas é uma forma conveniente e prática para a sintetização de erros.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro e à Escola de Engenharia de São Carlos.

## REFERÊNCIAS

- DI GIACOMO, B. “Computer aided calibration and hybrid compensation of geometric errors in coordinate measuring machines”. Inglaterra, Maio 1986. 418p. Tese – University of Manchester Institute of Science and Technology.
- DENAVIT, J.; HARTENBERG, R. S. “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices”. Journal of Applied Mechanics, p. 215-221, Jun. 1955.
- PAUL, R. P. “Robot manipulators: mathematics, programming, and control”. Massachusetts: THE MIT Press, p. 9-40, 1981.
- LIM, C. K.; BURDEKIN M. “Rapid volumetric calibration of coordinate measuring machines using a hole bar artifact”. Journal of Engineering Manufacture, v.216, Part B, p.1083-1093, 2002.
- ORREGO R. M. M., “Método de calibração direta para máquinas de medir a três coordenadas”, Brasil, Novembro 1999. p.155-166. Tese – Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARDOZA J. A. S. “Máquinas virtuais de medir à três coordenadas”. São Carlos-SP, Brasil, 1995. 209p. Tese. Escola de Engenharia de São Carlos.
- SANTOLARIA, J.; AGUILAR, J. J.; YAGÜE, J. A.; PASTOR, J. “Kinematic parameter estimation technique for calibration and repeatability improvement of articulated arm coordinate measuring machines” Precision Engineering, v.32, p.251–268, 2008.