Simplificações admitidas pela norma ISO GUM.

João Antônio Palma Setti [1] , *Vicente Machado Neto* [2]

[1] Departamento de Mecânica, UTFPR, Curitiba, Brasil, setti@utfpr.edu.br
[2] Departamento de Eletrônica, UTFPR, Curitiba, Brasil , vmachado@utfpr.edu.br

Resumo:
No cálculo de incertezas de medições fazemos algumas suposições aceitas pela norma ISO GUM, tais quais: as fontes de incertezas são estatisticamente independentes e que a somatória de diferentes distribuições converge para uma distribuição normal.

Com base no teorema do valor central e na suposição de entradas independentes, faz-se o cálculo da incerteza padrão, somando quadraticamente as contribuições padrões de cada uma das incertezas. A partir da incerteza combinada, fazemos a expansão para 2 σ com base na tabela t student e nos graus de liberdade.

Neste artigo pretende-se por simulações matemáticas, utilizando-se o método Monte Carlo, experimentar diversas situações de variáveis de entrada de X_i (incertezas) e verificar as distribuições resultantes das somatórias. Até que ponto pode-se admitir que a distribuição resultante de saída seja uma distribuição normal, quais os possíveis erros que incorremos com isto?

Palavras chave: ISO GUM, Cálculo de incerteza de medição.

1. INTRODUÇÃO

A ISO GUM baseando-se no Teorema do Limite Central, diz que a partir da estimativa y do mensurando Y, sendo Y dependente das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$, das quais são conhecidas (suas esperanças, variâncias e momentos de ordem superior, se as distribuições não são normais) e se Y é uma função linear das grandezas de entrada, $Y = c_1X_1+c_2X_2+...+c_NX_N$, então a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida por convolução das distribuições individuais.

O Teorema do Limite Central diz que se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ e todos os X_i são caracterizados por distribuições normais, então a distribuição convolucionada resultante de Y também será normal. Entretanto, mesmo que as distribuições de X_i não sejam normais, a distribuição de Y pode, freqüentemente, ser aproximada por uma distribuição normal devido ao Teorema do Limite Central. Este teorema estabelece que a distribuição de Y será aproximadamente normal, com esperança $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(x_i)$ e variância $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(x_i)$, onde $E(X_i)$ é a esperança de X_i e $\sigma^2(X_i)$ é a variância de X_i, se os X_i são independentes e $\sigma^2(Y)$ é muito maior do que qualquer componente individual $c_i^2\sigma^2(X_i)$ de um X_i, com distribuição não normal.

Se a relação funcional entre Y e suas grandezas de entrada é não linear e se uma expansão de primeira ordem da série de Taylor da relação não é uma aproximação aceitável, então a distribuição de probabilidade de Y não pode ser obtida pela convolução das grandezas de entrada. Em tais casos, outros métodos numéricos ou analíticos são requeridos.

2. OBJETIVOS

Verificar a validade das simplificações admitidas pela norma ISO GUM no cálculo de incertezas de medição e quais os limites em que estas simplificações podem ser verdadeiras ou falsas. Principalmente, testar situações onde uma das componentes a serem convolucionadas, apresente um $c_i^2\sigma^2(X_i)$ maior que os componentes individuais.

3. MÉTODO

Através de simulações matemáticas utilizando-se o Método de Monte Carlo, vamos verificar se as simplificações admitidas pela norma ISO GUM são verdadeiras em algumas situações limites, ou mesmo quais os erros incorridos em relação a outros métodos.

Utilizou-se a planilha eletrônica Excel para fazer simulações de distribuições Normais e Retangulares. Para as distribuições Normais utilizamos média igual a 100 e desvio padrão igual a 10 e a equação 1 para a simulação.

$$x_1 = \left[\sqrt{-2\ln r_1}\cos(2\pi\, r_2)\right]\sigma + \mu$$

$$r_1 = número\ aleatório\ gerado\ pelo\ excel$$

$$r_2 = segundo\ número\ aleatório\ gerado\ pelo\ excel$$

$$\sigma = desvio\ padrão = 10\ atribuído$$

$$\mu = valor\ médio = 100\ atribuído$$

Foram simulados 1000 valores.

Equação 1 – Algoritmo gerador de distribuição normal [2].

Optou-se pela simulação através da formula acima para se ter atualizações a cada instante dos valores gerados, o que não seria possível utilizando-se a função do Excel de geração de distribuição Normal, haja visto que a mesma é feita uma única vez, tirando-se assim a capacidade de realizar facilmente diversas simulações.

Para as distribuições retangulares utilizou-se a equação 2 para a simulação.

$$x = a + (b - a)r$$
$$a = limite\ inferior; b = limite\ superior; r = número\ aleatório\ gerado$$

Foram simulados 1000 valores.

Equação 2 – Algoritmo gerador de distribuição retangular [2].

Foram simulados 1000 valores utilizando-se 82 e 118 como limites inferior e superior respectivamente. A idéia é que os valores correspondentes as dispersões de 68,27% das distribuições Normais e retangulares ficassem próximos, ou seja Normal = 10 e retangular igual a $\frac{\left(\frac{118-82}{2}\right)}{\sqrt{3}} = 10{,}39$.

Nas figuras 1 e 2 vê-se as distribuições normal e retangular simuladas por meio dos seus histogramas.

A partir das simulações foram testadas as seguintes situações, sempre utilizando duas distribuições normais e duas retangulares:

1. Somatória de 2 normais e 2 retangulares com iguais pesos;
2. Somatória de 1 retangular com 85% do peso, mais 2 normais e 1 retangular com 5% de peso cada. Ou seja somando temos uma retangular com 90% do peso total;
3. Somatória de 1 retangular com 70% do peso, mais 2 normais e 1 retangular com 10% de peso cada. Ou seja somando temos uma retangular com 80% do peso total;
4. Somatória de 1 retangular com 55% do peso, mais 2 normais e 1 retangular com 15% de peso cada. Ou seja somando temos uma retangular com 70% do peso total;
5. Somatória de 1 retangular com 40% do peso, mais 2 normais e 1 retangular com 20% de peso cada. Ou seja somando temos uma retangular com 60% do peso total;

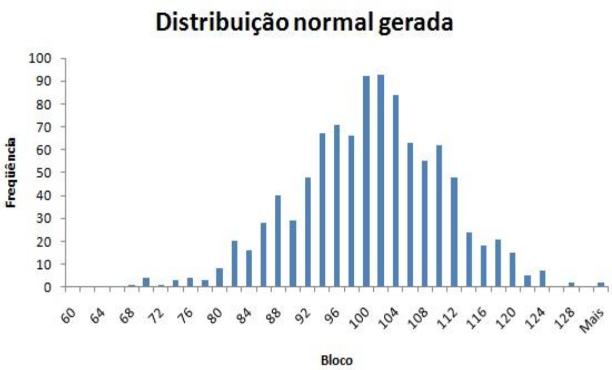

Figura 1 – Distribuição normal simulada.

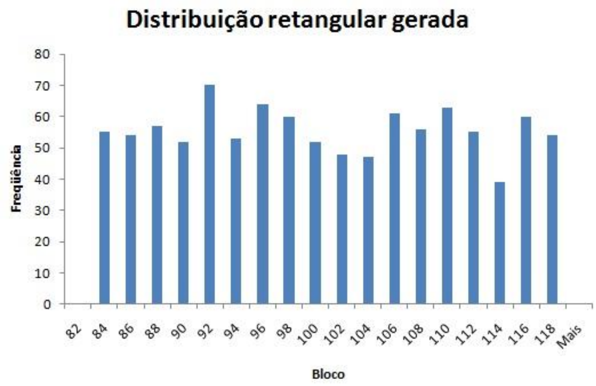

Figura 2 – Distribuição retangular simulada.

Para a somatória onde participam duas distribuições normais mais duas distribuições retangulares todas com pesos iguais se observa que a distribuição resultante se aproxima muito de uma distribuição normal, como pode ser visto na figura 3.

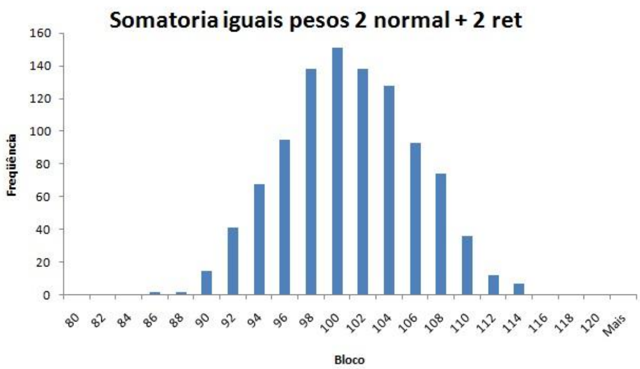

Figura 3 – Somatória resultante de 2 normais e 2 retangulares com iguais pesos.

Para a somatória onde temos uma retangular com 90% do peso a distribuição resultante se aproxima muito de uma distribuição retangular, como pode ser visto na figura 4.

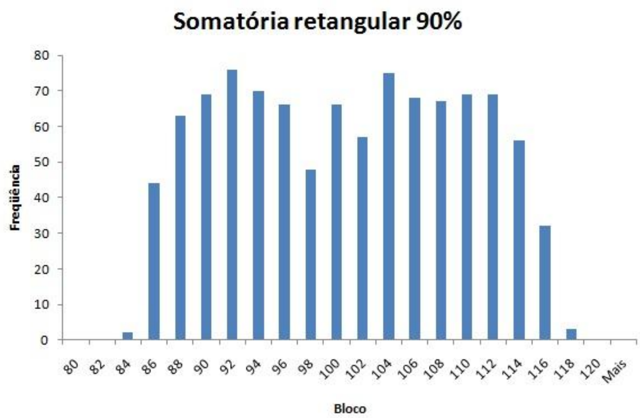

Figura 4 – Somatória resultante de 2 normais e 2 retangulares com 90% do peso.

Para a somatória onde temos uma retangular com 80% do peso a distribuição resultante também se aproxima de uma distribuição retangular, como pode ser visto na figura 5.

Para a somatória onde temos uma retangular com 70% do peso a distribuição resultante se aproxima de uma distribuição normal, como pode ser visto na figura 6.

Para a somatória onde temos uma retangular com 60% do peso a distribuição resultante se aproxima muito de uma distribuição normal, como pode ser visto na figura 7.

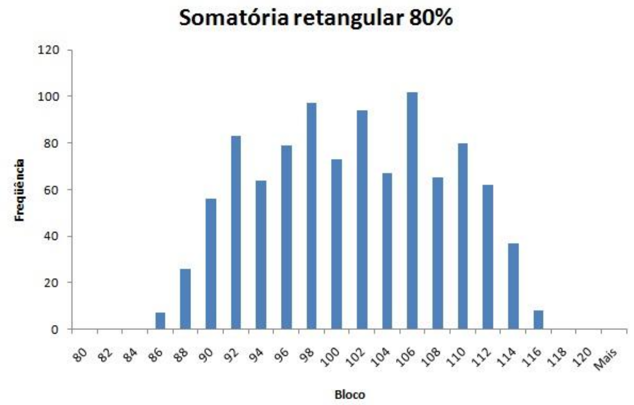

Figura 5 – Somatória resultante de 2 normais e 2 retangulares com 80% do peso.

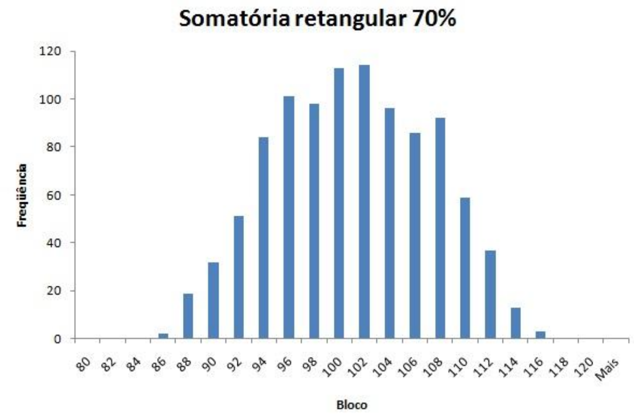

Figura 6 – Somatória resultante de 2 normais e 2 retangulares com 70% do peso.

Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 1 que representa a média de 10 simulações. Na tabela as colunas representam as 5 diferentes simulações feitas ou seja: Iguais pesos; Uma retangular com 90% do peso; Uma retangular com 80% do peso; Uma retangular com 70% do peso e Uma retangular com 60% do peso. Considerando as curvas resultantes, calculou-se a incerteza padrão combinada resultante pelos seguintes métodos: a) Abrangência de aproximadamente 68% dos casos obtida diretamente do gráfico (histograma), ou seja como eram 1000 simulações teríamos um intervalo abrangendo aproximadamente 680 simulações centralizadas; b) Cálculo do desvio padrão dos dados obtidos da somatória das distribuições, ou seja simplesmente calculando o desvio padrão da somatória das distribuições com os seus devidos pesos atribuidos;

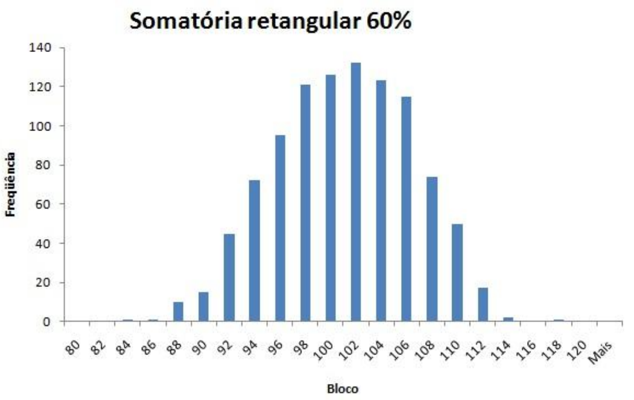

Figura 7 – Somatória resultante de 2 normais e 2 retangulares com 60% do peso.

c) Cálculo segundo a norma ISO GUM considerando a somatória quadrática das incertezas padrões de cada uma das fontes, tirando a raiz quadrada do resultado e d) Cálculo considerando a resultante como uma distribuição retangular, ou seja tirando-se a média dos limites superior e inferior, dividido por raiz quadrada de 3.

Com base nos cálculos das incertezas resultantes pelas 4 formas descritas acima, calculou-se as diferenças percentuais entre elas a saber: a) Desvio Padrão dos dados e Gráfico - % Sim / Graf (método b / método a); b) Gráfico e Retangular - % Graf / Ret (método a / método d); c) Gráfico e ISO - % Graf / ISO (método a / método c); d) Desvio padrão dos dados e ISO - % Sim / ISO (método b / método c); d) Desvio padrão dos dados e Retangular - % Sim / Ret (método b / método d).

Analisando os resultados obtidos na Tabela 1 tomando por base o cálculo da incerteza obtido do gráfico para 68%, observa-se:

1) Para a somatória de 2 normais e 2 retangulares com iguais pesos, a diferença percentual do gráfico para o método de cálculo da ISO é de apenas 1,7 %. Portanto o método de cálculo da ISO é adequado, uma vez que a distribuição resultante é uma normal;

2) Para a somatória de 1 retangular com 90% do peso a diferença percentual do gráfico para o método de cálculo da ISO é de 11,94%, neste caso calculando-se o desvio padrão como sendo uma distribuição retangular o erro cai para 3,56%, uma vez que a distribuição resultante se aproxima mais de uma retangular;

3) Para a somatória de 1 retangular com 80% do peso a diferença percentual do gráfico para o método de cálculo da ISO é de 13,63%, neste caso calculando-se o desvio padrão como sendo uma distribuição retangular o erro cai para 6,72%, o que é também significativo, uma vez que a distribuição resultante se aproxima mais de uma retangular;

4) Para a somatória de 1 retangular com 70% do peso a diferença percentual do gráfico para o método de cálculo da ISO é de 9,44 %. Neste caso o cálculo da incerteza como sendo uma distribuição retangular leva a erros de 28,36%, uma vez que a forma da distribuição resultante mais se parece com uma normal;

5) Para a somatória de 1 retangular com 60% do peso a diferença percentual do gráfico para o método de cálculo da

ISO é de 5,01 %, uma vez que a distribuição resultante já converge bem mais para uma normal, apesar do peso 60% dado para a distribuição normal. O erro considerando-se uma distribuição retangular passa dos 50%;

As demais análises feitas podem ser obtidas diretamente da Tabela 1, observa-se uma coerência muito grande das incertezas calculadas através do desvio padrão diretamente dos dados e pela ISO GUM com diferenças percentuais menores que 1% (% Sim/ISO da tabela 1).

Tabela 1 – Quadro resumo de 10 simulações.

Tabela Resumo de 10 Simulações Valores Médios					
	Igual Peso	Ret 90%	Ret 80%	Ret 70%	Ret 60%
Tipo Dist	Normal	Retang	Retang	Normal	Normal
Métodos de Cal					
a) Graf 68%	5,18	10,06	8,65	6,94	5,72
b) Simul DP	5,10	8,92	7,51	6,30	5,44
c) ISO GUM	5,09	8,86	7,47	6,28	5,43
d) Retang	8,97	9,70	9,22	8,90	8,77
Dif % dos mét.					
%Sim/Graf	-1,62	-12,78	-15,17	-10,08	-5,15
%Graf/Ret	-73,14	3,56	-6,72	-28,36	-53,35
%Graf/ISO	1,70	11,94	13,63	9,44	5,01
% Sim/ISO	0,14	0,72	0,55	0,32	0,13
% Sim/ Ret	-75,85	-8,73	-22,88	-41,28	-61,23

4. CONCLUSÕES

A simplificação admitida pela norma ISO GUM que a distribuição resultante converge para uma distribuição normal, apesar das distribuições somadas serem das mais diversas é válida, principalmente, quando não há predominância de um determinado tipo de distribuição, diferente de uma distribuição normal. Este fato observou-se quando da somatória de duas distribuições normais e duas distribuições retangulares com iguais pesos, quando os erros foram inferiores a 2% e mesmo quando a distribuição retangular representava um peso de 60% quando o erro ficou em apenas 5%.

Para a condição em que há predominância de uma distribuição retangular da ordem de 90, 80 e 70% sobre as distribuições normais, os erros da metodologia da ISO giram em torno de 10 a 13,6%. O que demonstra que a metodologia de cálculo de incerteza de medição da norma ISO GUM é bastante robusta, mesmo em condições extremas.

O fato de admitirmos um outro tipo de distribuição diferente da normal, no caso retangular como resultante, não levou a diminuições significativas nos erros, apenas quando os pesos da retangular eram de 90 e 80%, pode-se dizer que houve vantagens.

As incertezas resultantes do cálculo pela norma ISO GUM foram sempre um pouco superiores aos valores obtidos diretamente do gráfico, o que demonstra que a metodologia é um pouco conservadora, o que pode ser uma vantagem.

Como as condições simuladas são extremas, ou seja distribuição retangular, supõe-se que outras distribuições irão produzir resultados mais favoráveis a convergência para uma distribuição normal.

Portanto quando determinadas condições extremas se apresentarem, a simulação matemática usando-se o Método de Monte Carlo, que também é previsto na ISO GUM, pode levar a valores mais corretos, mas sua diferença para o método de cálculo tradicional da ISO GUM não será muito superior a 10%.

REFERÊNCIAS

[1] **Guia para Expressão da Incerteza de Medição**. Terceira edição brasileira em língua portuguesa – Rio de Janeiro: ABNT, INMETRO, 2003.

[2] **Reliability modeling with spreadsheets.** Dodson, Bryan. ASQ`s 53rd Annual Quality Congress Proceedings.

[3] **Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial.** Albertazzi, Armando, André R. de Sousa. Barueri, SP: Manole, 2008.