



# AVALIAÇÃO DE FONTES DE INCERTEZA DE UMA BALANÇA EXTERNA AERODINÂMICA: PARTE 1

Barbosa I.M.<sup>1</sup>, Reis M.L.C.C.<sup>2</sup>, Castro R.M.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, [itamarbarbosa@lsi.usp.br](mailto:itamarbarbosa@lsi.usp.br)

<sup>1,2</sup>Instituto de Aeronáutica e Espaço, São José dos Campos, Brasil, [mluisareis@iae.cta.br](mailto:mluisareis@iae.cta.br)

<sup>3</sup>Instituto de Estudos Avançados, São José dos Campos, Brasil, [rmcastro@ieav.cta.br](mailto:rmcastro@ieav.cta.br)

**Resumo:** Balanças aerodinâmicas são empregadas em túneis de vento para estimar forças e momentos agindo no modelo de teste. Este artigo propõe a utilização de uma metodologia para avaliar as possíveis fontes de incertezas na calibração de uma balança aerodinâmica multicomponente do tipo externa. Os esforços aerodinâmicos e as respostas dos sensores da balança são grandezas diferentes e necessitam de uma Curva de Calibração multivariada para relacioná-los, sendo obtida nas calibrações anteriores ao ensaio. Um polinômio multivariado ajustado pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é usado para interpolar os pontos da calibração. As incertezas das cargas aplicadas e das leituras dos sensores são consideradas na regressão. A redução dos dados inclui a estimativa dos valores dos coeficientes do polinômio, a qualidade do ajuste e, principalmente, a avaliação das fontes de incerteza consideradas e seus respectivos valores. Foram detectadas fontes de incerteza preponderantes e consistentes na calibração da balança aerodinâmica externa, após longo tempo de estudos.

**Palavras Chaves:** balança aerodinâmica, calibração, incerteza na medição, túnel de vento, método dos mínimos quadrados.

## 1. INTRODUÇÃO

O pessoal da divisão aerodinâmica do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) vêm trabalhando para melhoria da qualidade dos dados originários de testes aerodinâmicos. Seguindo recomendações internacionais baseadas na convenção do metro, diversos estudos têm sido conduzidos em ordem melhorar a confiabilidade metrológica das medições, testes e calibrações em túneis de vento subsônico e transônico. Um dos projetos é o desenvolvimento de metodologias para avaliação das incertezas agindo no modelo em teste.

O instrumento utilizado para estimar os esforços aerodinâmicos é a balança aerodinâmica externa. É externa porque é engastada externamente ao modelo em teste, a interna é engastada internamente ao modelo. As incertezas deste sistema de medição contribuem para as incertezas no modelo em teste e isso que este trabalho se

propõe: identificar as fontes de incertezas preponderantes na calibração dessa balança.

O trabalho inicia-se com o levantamento das potenciais fontes de incerteza que podem atuar significativamente na calibração da balança aerodinâmica e em seguida avaliar seus respectivos valores. Como as fontes de incerteza podem ser em grande número\* é salutar encontrar quais delas são preponderantes.

Durante um longo período foram levantadas potenciais fontes de incertezas no túnel de vento TA2, porém não estão todas aqui enumeradas, e sim duas que foram identificadas como preponderantes. Como será verificado no texto, é possível identificá-las sem a necessidade de enumerar todas as fontes de incerteza possíveis (o que tornaria o trabalho infundável).

Uma vez que é necessária uma metodologia para as avaliações de incertezas, este trabalho utiliza o MMQ para interpolar os pontos de calibração (medidos) num polinômio multivariado que representa a Curva de Calibração.

### 1.1. Os Esforços Aerodinâmicos:

São seis os esforços aerodinâmicos medidos pela balança externa, três forças e três momentos os quais representam o mensurando.

A terminologia aqui empregada para esses esforços aerodinâmicos é: Força Axial ou de Arrasto (F1), Força lateral (F2), Força Normal ou de Sustentação (F3), Momento de Rolagem (F4), Momento de Arfagem (F5) e Momento de Guinada (F6).

### 1.2. A Balança Aerodinâmica Externa Multi-Componente

A balança externa utilizada neste estudo (Fig. 1a) não somente é externa ao modelo como também é externa à seção de ensaio, um mastro engasta o modelo disposto na seção de ensaio (Fig. 1b) ao topo da balança.

As leituras dos esforços aplicados no mastro da balança são capturadas por seis sensores do tipo células de carga (denominados R1 a R6) e a indicação se realiza através de uma grandeza diferente do mensurando, a diferença de potencial elétrico (ddp). Esse fato configura

\* A rigor, a quantidade de fontes de incerteza é infundável.

uma medição indireta do mensurando e, independente de outros fatores, necessita a expressão de uma Curva de Calibração que relacione essas grandezas para que, a partir das leituras de ddp, chegue-se aos valores de forças e momentos.

Quanto à sua construção mecânica, é uma balança do tipo piramidal que visa separar os esforços aerodinâmicos. Se essa separação fosse absoluta, cada sensor seria dedicado a cada esforço aerodinâmico e a Curva de Calibração poderia ser unidimensional. Contudo, a disposição dos tirantes, os quais engastam a balança nos sensores, e os desalinhamentos mecânicos, acabam por correlacionar as leituras efetuadas pelos sensores. Daí a necessidade da Curva de Calibração, também independente de outros fatores, ser multivariada (representada pelo polinômio multivariado neste caso).



Fig. 1a. A balança externa do túnel de vento TA2 do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE).

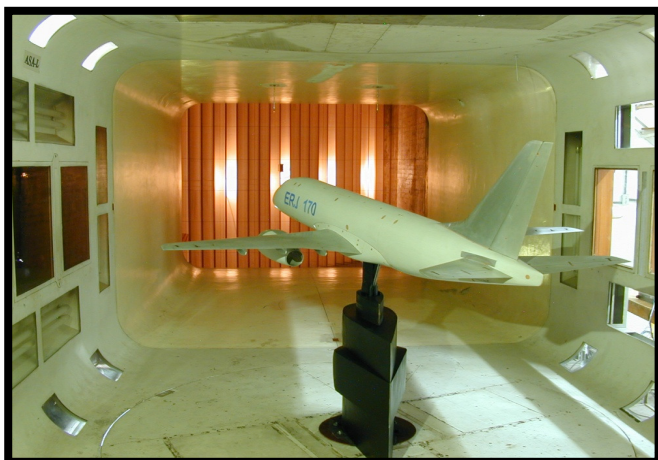


Fig. 1b. Seção de ensaio do Túnel de Vento TA2 do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE). Modelo em teste e mastro de engaste modelo-balança externa de esforços aerodinâmicos.

## 2. MÉTODOS

### 2.1. A Calibração da Balança Externa

A calibração da balança é executada antes dos ensaios e serve para expressar a Curva de Calibração bem como estimar as incertezas combinadas devido a esse processo. Para realizá-la, são empregadas massas em pratos engastados em cabos que, através de polias, exercem esforços numa cruz de calibração que está no lugar do modelo de ensaio, Fig. 2. Conhecendo-se o valor da aceleração da gravidade e do comprimento dos braços da cruz de calibração, se conhece os valores das forças e momentos aplicados na balança.

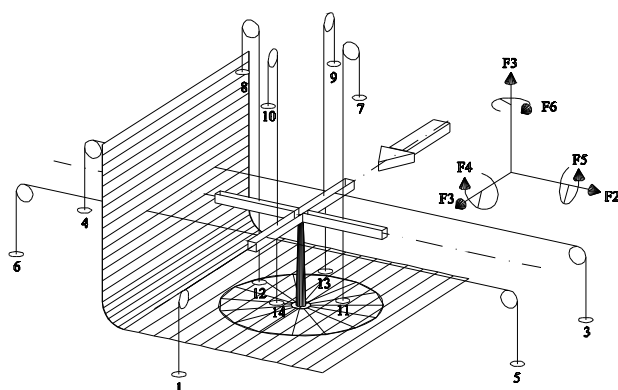


Fig. 2. Esquema da balança externa com a cruz de calibração montada no mastro. Com as massas-padrão colocadas nos pratos, cabos e polias transformam os pesos em simulação de esforços aerodinâmicos.

Das estratégias para se efetuar a calibração da balança, as duas mais importantes são: a estratégia espacial e a estratégia amostral. Quanto à estratégia espacial, a calibração pode ser efetuada em diversos ângulos de guinada, arfagem ou rolamento. Já a estratégia amostral trata dos valores e das combinações de esforços que podem ser aplicados à cruz de calibração.

Tendo como referência a direção do vento e suas normais ortonormais, uma calibração efetuada quando todos os três ângulos são igualados a zero é denominada calibração alfa na divisão de aerodinâmica do IAE, e foi a calibração estudada neste artigo (parte 1 de todo o trabalho).

Quanto à estratégia amostral, de longa data na divisão de aerodinâmica do IAE, são aplicadas cargas de massas para formar cada força ou momento individualmente ou são aplicadas massas para formar forças e momentos aos pares, perfazendo 73 vetores (ou combinações) de medição onde cada um deles (ou delas) aqui chamaremos também de carregamento.

## 2.2. A Curva de Calibração

A Curva de Calibração é obtida primeiramente de um modelo matemático. Mediante as considerações do item 1.2, o escolhido foi um polinômio multivariado de segundo grau Eq.(1), conforme utilizado internacionalmente em diversos túneis de vento [2] e como já vem sendo utilizado na divisão de aerodinâmica do IAE de longa data, mediante resultados satisfatórios obtidos em testes para a indústria aeronáutica.

O sistema é representado por uma combinação linear de vinte e sete (27) funções de R's, Eq.(1). Essas funções são por vezes denominadas funções de base e correspondem a: R1, R2, R3, R4, R5, R6, R1R1, R1R2, R1R3, R1R4, R1R5, R1R6, R2R2, R2R3, ..., R6R6. São 27 parâmetros a serem ajustados para cada um dos 6 esforços aerodinâmicos F's. Por ser um polinômio, a dependência em a e b é linear.

$$F_i = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} R_j + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 b_{i,j,k} R_j R_k \quad (1)$$

Como exemplo, para a força de arrasto F1, Eq.(1) torna-se:

$$F_1 = a_{1,1} R_1 + a_{1,2} R_2 + a_{1,3} R_3 + \dots + a_{1,6} R_6 + b_{1,1,1} R_1 R_1 + b_{1,1,2} R_1 R_2 + \dots + b_{1,6,6} R_6 R_6 \quad (2)$$

Os termos na Eq.(1) reforçam a representação da correlação entre as leituras R's.

## 2.3. A Estimação dos Parâmetros

Utilizando o MMQ [3,5], para estimar os valores numéricos dos parâmetros da Curva de Calibração são utilizadas de 73 combinações de medição (carregamentos ou pontos medidos), conforme explicado no item 2.1. Iniciamos contabilizando cada um desses carregamentos, ou seja, os valores dos esforços aplicados e cada uma das leituras das células de carga em prol de estimarmos os valores dos parâmetros.

Lembrando que são 27 funções de base e, portanto, 27 parâmetros a serem determinados, nós temos, para cada um dos esforços aerodinâmicos, um vetor F com dimensão 73x1 cujos elementos representam o valor do respectivo esforço aerodinâmico em cada carregamento. A matriz projeto R, contém os valores numéricos das funções base conforme item 2.2, com dimensão 73x27, ou seja, os valores de cada função de base em cada um dos carregamentos. A matriz de covariância V terá dimensão 73x73, o que equivale a 73 valores de variância em sua diagonal contabilizada para cada carregamento, os elementos fora da diagonal são as covariâncias espelhadas (matriz simétrica).

Denotando por  $\hat{p}$  o vetor de valores dos parâmetros da Curva de Calibração, o MMQ ponderado pelas variâncias (e covariâncias), matriz V, resulta em:

$$\hat{p} = (R^T \cdot V^{-1} \cdot R)^{-1} \cdot (R^T \cdot V^{-1} \cdot F) \quad (3)$$

$R^T$ : Transposta da matriz projeto R;

$V^{-1}$ : Inversa da Matriz de Covariância V.

A matriz  $(R^T \cdot V^{-1} \cdot R)^{-1}$  é conhecida como matriz erro porque ela representa a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados, ou seja, os elementos de sua diagonal são as variâncias dos parâmetros e os demais elementos as covariâncias, então ela pode ser denotada por  $V_{\hat{p}}$  e possui dimensão 27x27 nesta aplicação.

## 2.4. A Matriz de Covariância

A matriz de covariâncias, dada pela Eq.(4), representa a contabilização das variâncias (o quadrado do desvio padrão) e covariâncias de todas as variáveis envolvidas para a expressão da Curva de Calibração. No caso deste trabalho ela expressa as covariâncias e variâncias relativas àquelas devido à aplicação dos esforços aerodinâmicos (e consequentemente da aplicação das massas), quanto àquelas originárias das condições de repetitividade das leituras das células de carga. Essas contabilizações são efetuadas à parte, a primeira é representada pela matriz de covariância referente os valores de saída da Curva de Calibração, neste trabalho àquelas originárias dos esforços aerodinâmicos aplicados nas calibrações,  $V_w$  na Eq.(4). A segunda contabilização é representada pela matriz de covariâncias referente os valores de entrada da Curva de Calibração, neste trabalho àquelas devido à repetitividade das leituras das células de carga durante as calibrações,  $V_R$  na Eq.(4).

$$V = V_w + D_i \cdot V_R \cdot D_i^T \quad (4)$$

A matriz V é uma matriz simétrica, entretanto, quando não consideramos as covariâncias ela se torna uma matriz diagonal. Neste trabalho somente utilizamos matrizes diagonais, ou seja, não consideremos, em primeiro momento, as covariâncias.

Quando não temos como estimar as covariâncias e as variâncias é comum utilizarmos as variâncias iguais às unidades e as covariâncias nulas, neste caso a matriz de covariâncias passa a ser uma matriz identidade. Um importante fato quando utilizamos uma matriz identidade como matriz de covariâncias é que o desvio padrão do ajuste, dado pela raiz quadrada da Eq.(5), pode ser considerado uma estimativa de incerteza nos valores de saída da Eq.(1) [4].

$$S^2 = \frac{1}{N - m} \sum_{i=1}^N (F_{i, \text{fitted}} - F_{i, \text{applied}})^2 \quad (5)$$

onde:

N é o número de pontos medidos (número de carregamentos);

m é o número de parâmetros ajustados;

$F_{i, \text{applied}}$  é o esforço aplicado através das massas-padrão e, portanto, conhecido;

$F_{\text{fitted}}$  é o valor do esforço predito, através da Curva de Calibração ajustada, correspondente ao ponto medido.

## 2.5. A Matriz $V_W$

### 2.5.a. Primeira estimativa, Matriz $V$ como uma Matriz Identidade:

Na primeira estimativa, consideramos  $V=V_W$  uma matriz identidade  $73 \times 73$  para cálculo inicial dos parâmetros da Eq. (1) bem como para o cálculo do desvio padrão do ajuste para fins comparativos. A dimensão da matriz, neste caso, deve congruir com o número de carregamentos de esforços aerodinâmicos.

### 2.5.b. Segunda estimativa, Matriz $V$ como uma Matriz Diagonal:

Na segunda estimativa, consideramos  $V_W$  uma matriz diagonal (não identidade) com valor único de variância de  $7,4E-07$  (Kgf)<sup>2</sup> e  $7,4E-07$  (Kgf<sup>m</sup>)<sup>2</sup>†. Esse valor é oriundo basicamente de duas subfontes de incerteza propagadas: uma proveniente da estimativa da incerteza da calibração das massas e a outra do processo de aplicação dessas na calibração da balança externa. A última é gerada principalmente pelo fato de não se conhecer especificamente qual o conjunto de massa que está sendo aplicado para gerar os esforços aerodinâmicos, gerando uma dúvida (ou incerteza). Também foram consideradas incertezas devido aos braços da cruz de calibração e da gravidade local, porém não foram tão significativos quanto às duas primeiras citadas‡. A matriz  $V_W$  com esses valores será combinada com a matriz a ser transformada  $V_r$  conforme Eq. (4) para contabilizar a matriz  $V$  cuja dimensão será novamente  $73 \times 73$ .

Como não são utilizadas outras matrizes neste trabalho, a não ser a matriz identidade, chamaremos este caso da matriz  $V$  de simplesmente de Matriz Diagonal para diferenciá-la da matriz  $V$  como uma Matriz Identidade§.

## 2.6. A Matriz $D_i \cdot V_r \cdot D_i^T$

A matriz  $D_i \cdot V_r \cdot D_i^T$ , de dimensão  $73 \times 73$ , corresponde às variâncias e covariâncias nos valores de saída da Eq. (1) devido aos valores das variâncias e covariâncias nas variáveis de entrada, ou seja, aquelas associadas às leituras das células de carga  $V_r$ , em outras palavras, é o rebatimento das dispersões dadas na grandeza de leitura para as grandezas do mensurando.

Os valores de variâncias na matriz  $V_r$ , considerados neste trabalho, são oriundos das condições de repetitividade em 3 conjuntos de 73 carregamentos efetuadas num intervalo de tempo correspondente a quinze dias. Neste trabalho, consideramos as variâncias de

† Os valores dos braços da cruz de calibração possuem comprimentos iguais a 1 m.

‡ Os cálculos destes valores resultam da propagação das incertezas na calibração das massas, como esses cálculos não contribuem para o objetivo direto deste estudo, eles não foram aqui explicitados.

§ Muito embora a matriz identidade seja também uma matriz diagonal.

cada leitura da célula de carga em cada um dos 73 carregamentos para cada esforço aerodinâmico, ou seja,  $73 \times 6 = 438$  valores de variâncias. Portanto, a dimensão de  $V_r$  é  $438 \times 438$ .

A Eq.(6) mostra a disposição das variâncias (diagonal) e covariâncias na matriz  $V_r$ .

$$V_r = \begin{bmatrix} u^2(R_{1(i)}) & \cdots & u(R_{1(i)}, R_{2(i)}) & \cdots & u(R_{1(i)}, R_{6(73)}) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u(R_{2(i)}, R_{2(i)}) & \cdots & u^2(R_{2(i)}) & \cdots & u(R_{2(i)}, R_{6(73)}) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u(R_{6(73)}, R_{1(i)}) & \cdots & u(R_{6(73)}, R_{2(i)}) & \cdots & u^2(R_{6(73)}) \end{bmatrix}_{438 \times 438} \quad (6)$$

onde  $R_{ij}$  é a leitura da célula de carga  $i$  no carregamento  $j$  e  $u(R_{ij})$  é a incerteza devido à repetitividade entre calibrações na leitura de célula de carga  $i$  no carregamento  $j$  (para  $i=1,2, \dots, 6$  e  $j=1,2, \dots, 73$ ).

Haverá uma matriz  $D_i$  para cada esforço aerodinâmico, sendo os seus elementos os coeficientes de sensibilidade calculados pelas derivadas parciais  $\partial F_{i(j)} / \partial R_{k(w)}$ , referentes ao esforço aerodinâmico  $i$  do carregamento  $j$  pela leitura da célula de carga  $k$  do carregamento  $w$  (para  $i,k=1,2, \dots, 6$  e  $j,w=1,2, \dots, 73$ ). Uma vez que as derivadas parciais estão definidas somente para  $w=j$ , então a matriz toma a forma da Eq.(7).

$$D_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{i(1)}}{\partial R_{1(1)}} & \cdots & \frac{\partial F_{i(1)}}{\partial R_{2(1)}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{\partial F_{i(4)}}{\partial R_{5(4)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{\partial F_{i(73)}}{\partial R_{6(73)}} \end{bmatrix}_{73 \times 438} \quad (7)$$

## 2.7. A Qualidade do Ajuste

A qualidade do ajuste é avaliada pela quantidade conhecida como qui-quadrado,  $\chi^2$ , definida na Eq.(8) [4].

$$\chi^2 = (F_{\text{applied}} - F_{\text{fitted}})^T \cdot V^{-1} \cdot (F_{\text{applied}} - F_{\text{fitted}}) \quad (8)$$

Escrevendo a Eq.(8) sem considerar as covariâncias, como efetuado neste trabalho, podemos reescrevê-la na forma da Eq.(9):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{73} \frac{(F_{i \text{ applied}} - F_{i \text{ fitted}})^2}{u_i^2} \quad (9)$$

A boa qualidade no ajuste, segundo a distribuição qui-quadrado, é alcançada quando o valor dessa quantidade é próximo do número dos graus de liberdade:

$$\nu = N - m \quad (10)$$

Podemos então definir o qui-quadrado reduzido:

$$\chi_v^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (11)$$

Cujo valor desejado é aproximadamente igual a 1.

### 2.8. A predição dos valores de esforços aerodinâmicos:

Para prever os valores dos esforços aerodinâmicos, a partir das leituras das células de carga, utilizamos os valores estimados dos esforços, após estimativa dos valores de parâmetros, dados pela Eq.(12). Cada esforço aerodinâmico possui um conjunto de 27 parâmetros ajustados.

$$F_{fitted} = R \cdot \hat{p} \quad (12)$$

$R$  possui dimensão  $73 \times 27$ ,  $\hat{p}$  possui dimensão  $27 \times 1$  e  $F_{fitted}$  possui dimensão  $73 \times 1$ .

As covariâncias e variâncias (e incertezas) nos esforços aerodinâmicos preditos podem ser obtidas pela Eq.(13):

$$V_{F_{fitted}} = R \cdot V_{\hat{p}} \cdot R^T \quad (13)$$

Essa equação é equivalente a aplicar a lei de propagação de incertezas (LPI) na Eq.(1) [1].

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O MMQ, juntamente com a concepção e um modelo matemático, promove não somente uma estimativa dos parâmetros representados pelo vetor  $\hat{p}$ , mas também as estimativas de suas variâncias e covariâncias. Com isso é possível interpolar a Curva de Calibração bem como obter estimativas das variâncias dos valores de saída preditos por essa curva.

A distribuição e o cálculo do qui-quadrado, por sua vez, permitem verificar a consistência e qualidade do ajuste utilizando o MMQ.

### 3.1 A Matriz de Covariância

A primeira matriz de covariância utilizada para MMQ foi a matriz identidade citada no item 2.5.a, primeira estimativa, isso equivale a considerar as variâncias na matriz  $V = V_w$ , Eq. (4), iguais a 1 e as covariâncias iguais a zero. Os valores do desvio padrão do ajuste para cada esforço aerodinâmico estão mostrados na tabela (1), primeira linha. O que vemos são valores diferentes do

desvio para cada esforço aerodinâmico, contudo eles possuem a mesma ordem de grandeza (E-02).

Nessa mesma tabela, segunda linha, estão também mostrados os desvios padrão do ajuste considerando a matriz  $V$  diagonal, resultado da aplicação da Eq. (4), citada no item 2.5.b, segunda estimativa (diagonal da matriz  $V_w$  diferente de 1). As covariâncias das matrizes  $V_w$  e  $V_r$  não foram consideradas neste trabalho.

Notoriamente, os valores dos desvios padrão do ajuste da segunda estimativa são ligeiramente diferentes do que os da primeira estimativa e possuem a mesma ordem de grandeza. Este fato decorre principalmente de dois fatos. O primeiro é a Eq. (5) que não depende dos valores de incertezas das grandezas medidas. O segundo é que os valores dos parâmetros mais significativos não se alteraram significativamente nas duas estimativas, conforme mostra a tabela (4) que será discutida no próximo item.

Os valores de variância máximo e mínimo para cada célula de carga considerada na matriz  $V_r$  estão mostrados na tabela (2), lembrando que foram considerados 73 valores de variâncias para cada célula de carga conforme item 2.6. Como podemos notar, os valores variam em até 05 ordens de grandeza.

### 3.2 A Estimativa dos Parâmetros

A tabela (4) mostra os valores dos parâmetros estimados para formar a Curva de Calibração, após aplicação do MMQ, considerando o modelo matemático dado pela Eq. (1). Em geral, eles diferem quando utilizamos a matriz de covariância  $V$  nos seus dois modos: como sendo a matriz identidade (item 2.5.a) ou como sendo a matriz diagonal conforme citado (item 2.5.b). Isso ocorre devido ao fato das variâncias não possuírem o mesmo valor na matriz  $V$  no segundo caso, fato decorrente dos valores diferentes da diagonal da matriz  $V_r$  e de sua transformação conforme Eq. (4).

Contudo, é perceptível que os parâmetros correspondentes ao primeiro termo do polinômio multivariado permanecem muito próximos (valores sublinhados) principalmente em dois casos: o primeiro caso é para aquela célula de carga correspondente ao esforço aerodinâmico respectivo à célula ( $F_{ix}R_i$ ). A explicação decorre do fato da construção da balança ser projetada na tentativa de separar cada esforço aerodinâmico para corresponder à leitura de cada célula de carga respectiva conforme citado no item 1.2. O segundo caso é quando a aplicação do esforço atua fortemente em duas células de carga, como é o caso da aplicação do da força lateral ( $F_2$ ) que claramente age também na célula correspondente ao momento de guinada ( $F_6$ ), e assim existem alguns outros. A explicação desse último caso é que, contrariando a idéia inicial do primeiro caso, a construção da balança é simplesmente grosseira nesses dois esforços e permite concorrência forte de leitura nas respectivas células de carga.

Nessa tabela também é mostrado a incerteza relativa dos parâmetros como forma de medir a significância de

cada parâmetro, quanto menor o seu valor, maior a significância do parâmetro. Os parâmetros que foram sublinhados na tabela (4) são aqueles que apresentam menor valor de incerteza padrão e portanto são os parâmetros mais significativos. Os valores de desvio padrão, para resultar nessas incertezas, foram retirados dos elementos da diagonal da matriz erro que representam as variâncias dos parâmetros conforme explanado no item 2.3.

### 3.3 A Qualidade no Ajuste

Na tabela (3) estão expressos os valores do qui-quadrado  $\chi^2$  e do qui-quadrado reduzido  $\chi_v^2$  dos ajustes considerando a matriz de covariância identidade e a matriz de covariância diagonal, conforme explanado no item 2.5 e item 3.1. O desejado é que o qui-quadrado resulte no valor próximo aos graus de liberdade, ou equivalentemente, o qui-quadrado reduzido igual a 1. Neste trabalho temos 73 equações e 27 parâmetros a serem ajustados, ou seja, 46 graus de liberdade.

## 4. CONCLUSÃO

A determinação da Curva de Calibração com exatidão satisfatória é um trabalho que requer investigação técnica-científica e conhecimento profissional da área específica de aplicação da Metrologia. As tarefas são as seguintes: relacionar as grandezas envolvidas, estimação numérica dos parâmetros do modelo para interpolação, estimação das incertezas associadas aos pontos interpolados, estimação de incertezas nos pontos medidos, caracterização das fontes de incerteza, caracterização das fontes de erros e avaliação do ajuste da Curva de Calibração.

A relação entre as grandezas entre si e essas com as fontes de erro pode ser contabilizada no modelamento matemático. O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) pode ser utilizado para estimar numericamente os parâmetros do modelo matemático com fins de interpolação e gerar a Curva de Calibração, permite também estimar as incertezas desses parâmetros e as incertezas dos valores interpolados. Com a utilização da distribuição qui-quadrado é possível avaliação do ajuste da Curva de Calibração.

O trabalho mostrou também que é possível contabilizar uma matriz de variâncias com dimensão maior do que as combinações de medições efetuadas (maior do que o número de equações consideradas). Ou seja, considerando cada incerteza de leitura, de cada célula de carga em cada uma das combinações de medição.

A determinação das fontes de incerteza teve uma conotação especial neste trabalho. Os levantamentos das fontes de incerteza é uma tarefa árdua efetuada pelo conhecimento profissional adquirido, muitas vezes, por experiência na área e por experiência no meio em que a medição está sendo efetuada. Essa tarefa pode ser dividida em duas subtarefas: a primeira é o levantamento das potenciais fontes de incerteza preponderantes através do conhecimento profissional. Esta fase é muito importante,

pois ela definirá quais as fontes de incerteza que valem a pena estudar. Se assim não for possível, face ao desconhecimento profissional prévio ou a extrema complexidade do sistema de medição, resta enumerar fontes e fontes de incertezas e perfazer um grande número de cálculos em cada uma delas, podendo o trabalho se tornar infundável ou sem resultados úteis.

Contudo, é possível identificar fontes de incertezas preponderantes utilizando o MMQ, muito embora ele, por si só, não garanta que sejam identificadas todas as fontes de incertezas preponderantes possíveis, de qualquer forma a segunda subtarefa é justamente elencar as fontes de incerteza preponderantes. O MMQ, juntamente com a distribuição qui-quadrado, podem ser utilizadas para a segunda subtarefa, como aqui o foram.

Cabe lembrar que a condição imposta pelo critério do qui-quadrado reduzido no MMQ é que as incertezas preponderantes não são necessariamente aquelas que possuem os maiores valores e nem os menores valores de uma dada enumeração de fontes de incerteza, pois nesses casos extremos seu valor pode se afastar de 1 para mais ou para menos, ou seja, as incertezas podem estar subdimensionadas ou superdimensionadas, seja por razões de equívocos em seu cálculo, seja pelas fontes de incerteza escolhidas e consideradas. Não se trata portanto de enumerar fontes de incerteza para escolher os maiores valores, tampouco de igualar incertezas preponderantes como incertezas com maiores valores (nem os menores valores). As incertezas preponderantes, na avaliação do qui-quadrado, são aquelas que denotam o valor mais provável da distribuição do qui-quadrado face o modelo matemático escolhido.

A tabela (3) mostra que os valores de qui-quadrado reduzido se aproximaram de 1 utilizando a matriz de covariâncias diagonal, quando comparados aos valores utilizando a matriz de covariância identidade. Isso mostra que as incertezas aqui consideradas, àquelas devido à calibração das massas e seu processo de aplicação e à repetitividade entre calibrações (refletida nas leituras de células de carga), são incertezas preponderantes.

Embora essas incertezas preponderantes possam não necessariamente serem as únicas possíveis, finalmente, após longo período de investigação, foram detectadas fontes de incerteza realmente importantes no processo de calibração da balança externa do túnel de vento TA2 da divisão de aerodinâmica do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE). Incertezas consideradas em trabalhos anteriores, tais como incerteza devido ao atrito polias/cabos e repetitividade numa só calibração, entre outras, havia resultado em valores de qui-quadrado reduzido em várias ordens de grandeza diferentes de 1.

Uma vez conhecida fontes de incerteza de real importância no processo de calibração, é possível aprofundar os estudos e perfazer trabalhos no sentido de melhorar as estimativas dos termos da Curva de Calibração e das incertezas associadas aos valores estimados. Em futuro breve, podem ser consideradas as covariâncias entre as fontes de incerteza e melhor apurar os valores de variâncias considerados. Remodelamentos matemáticos podem ser avaliados e podem ser avaliadas

novas fontes de incerteza. Novas estratégias amostrais podem ser empregadas e maiores tempos entre calibrações estudados. De qualquer forma, trabalhos anteriores não haviam detectado fontes de incerteza com valores de variância que se aproximassem do qui-quadrado igual a 1, pelo menos em mesma ordem de grandeza.

## REFERÊNCIAS

- [1] BIPM, “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”, 1995.
- [2] Calibration Report, Micro Craft Applied Science & Engineering, MC-.36-.63-A, May 1995, CA, USA.
- [3] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery “Numerical Recipes”, Cambridge University Press, 2nd ed., 1992.
- [4] P. R. Bevington “Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences”, McGraw-Hill, 1969.
- [5] R.M. Barker, M.G. Cox, A.B. Forbes, P. M. Harris, “Software Support for Metrology Best Practice Guide n.º 4: Discrete Modeling and Experimental Data Analysis”, Technical report, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2004.

Tabela 1. Desvio Padrão do Ajuste. Grandezas Forças (F1 a F3) e Momentos (F4 a F5), unidades Kg e Kgfm respectivamente.

Forma da Matriz de Covariâncias*	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Identidade	5,14E-02	4,74E-02	6,28E-02	2,39E-02	3,78E-02	6,28E-02
Diagonal	6,31E-02	5,68E-02	7,51E-02	2,99E-02	4,08E-02	8,34E-02

\* Matriz V conforme item 2.4

Tabela 2. Valores máximos e mínimos das variâncias de repetitividade nas leituras das células de carga em cada medição da combinação de 73 medições. Grandeza Diferença de Potencial (ddp), unidade mV.

Célula de Carga	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Valor Mínimo <sup>o</sup>	7.62E-07	2.59E-08	1.41E-07	9.89E-09	8.01E-06	2.45E-06
Valor Máximo <sup>o</sup>	8.86E-04	1.79E-05	7.02E-05	8.42E-04	9.27E-04	8.60E-04

<sup>o</sup> Matriz  $V_r$  conforme itens 2.4, 2.6 e 3.1.

Tabela 3. Qualidade do ajuste para duas condições da matriz de covariâncias V representada pelo qui-quadrado  $\chi^2$  e qui-quadrado reduzido  $\chi_v^2$ .

Esforço Aerodinâmico	$\chi^2$		$\chi_v^2$	
	F1	1,22E-01	4,18E+01	2,64E-03
F2	1,03E-01	2,26E+01	2,25E-03	4,91E-01
F3	1,81E-01	3,10E+01	3,95E-03	6,73E-01
F4	2,63E-02	1,07E+01	5,73E-04	2,34E-01
F5	6,58E-02	2,96E+01	1,43E-03	6,42E-01
F6	1,81E-01	7,39E+01	3,94E-03	1,61E+00
Matriz V	Matriz Identidade		Matriz Diagonal	

Tabela 4. Parâmetros estimados (preditos) para duas condições da matriz de covariâncias V e incerteza relativa dos parâmetros como indicador de significância.

	F1			F2			F3			F4			F5			F6		
p1	<b>3,52E+00</b>	<b>3,53E+00</b>	<b>6,99E-04</b>	1,90E-02	1,70E-02	<b>1,39E-01</b>	3,30E-02	3,30E-02	<b>9,02E-02</b>	-5,90E-04	-2,70E-03	<b>-6,36E-01</b>	-1,20E-02	-1,20E-02	<b>-1,92E-01</b>	-6,80E-03	-8,50E-03	<b>-2,25E-01</b>
p2	7,59E-03	7,60E-03	<b>3,76E-01</b>	<b>-2,30E+01</b>	<b>-2,30E+01</b>	<b>-1,92E-04</b>	1,50E-01	1,50E-01	<b>2,75E-02</b>	9,60E-02	9,50E-02	<b>4,62E-02</b>	3,20E-01	3,20E-01	<b>9,65E-03</b>	1,90E-01	2,00E-01	<b>1,90E-02</b>
p3	-9,07E-03	-9,56E-03	<b>-2,49E-01</b>	1,20E-03	-6,40E-04	<b>-5,62E+00</b>	<b>-2,60E+01</b>	<b>-2,60E+01</b>	<b>-2,68E-04</b>	2,90E-01	2,90E-01	<b>6,59E-03</b>	3,60E-02	3,40E-02	<b>9,57E-02</b>	-2,30E-02	-2,50E-02	<b>-8,95E-02</b>
p4	-6,02E-04	-7,11E-04	<b>-1,93E+00</b>	-4,10E-03	-5,80E-03	<b>-2,54E-01</b>	1,30E-02	1,50E-02	<b>1,60E-01</b>	<b>-5,70E+00</b>	<b>-5,70E+00</b>	<b>-1,60E-04</b>	2,20E-02	2,00E-02	<b>1,70E-01</b>	5,90E-04	2,70E-03	<b>3,45E-01</b>
p5	1,72E-03	1,65E-03	<b>6,51E-01</b>	7,40E-03	6,60E-03	<b>1,72E-01</b>	4,70E-03	4,40E-03	<b>5,05E-01</b>	1,70E-02	1,60E-02	<b>1,97E-01</b>	<b>4,70E+00</b>	<b>4,70E+00</b>	<b>2,69E-04</b>	5,50E-04	1,90E-03	<b>4,87E-01</b>
p6	2,55E-03	2,46E-03	<b>4,15E-01</b>	<b>-3,40E+00</b>	<b>-3,40E+00</b>	<b>-5,55E-04</b>	3,60E-02	3,60E-02	<b>4,10E-02</b>	-1,80E-02	-1,80E-02	<b>-8,47E-02</b>	1,60E-02	1,70E-02	<b>7,79E-02</b>	<b>4,80E+00</b>	<b>4,80E+00</b>	<b>3,57E-04</b>
p7	7,50E-04	2,92E-04	<b>4,21E-01</b>	3,10E-05	4,60E-05	<b>2,57E+00</b>	-5,10E-04	-4,20E-04	<b>-3,37E-01</b>	-2,00E-04	-1,20E-04	<b>-6,68E-01</b>	-5,70E-05	-4,90E-05	<b>-2,30E+00</b>	-1,70E-04	-8,30E-05	<b>-1,18E+00</b>
p8	-1,49E-04	-2,30E-04	<b>-1,44E+00</b>	-4,50E-04	-6,30E-06	<b>-9,76E+01</b>	3,60E-04	1,70E-04	<b>3,39E+00</b>	5,30E-04	5,40E-04	<b>8,95E-01</b>	1,60E-04	1,50E-04	<b>3,00E+00</b>	6,10E-04	1,40E-03	<b>4,00E-01</b>
p9	-1,19E-03	-4,65E-04	<b>-9,81E-01</b>	-1,60E-04	-6,60E-05	<b>-8,37E+00</b>	1,00E-03	1,90E-04	<b>2,83E+00</b>	7,90E-04	6,90E-04	<b>5,06E-01</b>	-1,90E-03	-1,80E-03	<b>-2,32E-01</b>	6,80E-05	3,50E-05	<b>1,75E+01</b>
p10	-1,01E-04	3,19E-06	<b>6,28E+01</b>	-8,30E-05	-2,20E-05	<b>-7,36E+00</b>	8,40E-05	-4,30E-05	<b>-7,70E+00</b>	1,40E-04	1,50E-05	<b>8,87E+00</b>	1,20E-04	2,50E-04	<b>1,83E+00</b>	6,90E-04	4,50E-04	<b>3,42E-01</b>
p11	-3,75E-05	4,03E-05	<b>4,49E+00</b>	5,90E-06	3,90E-05	<b>4,48E+00</b>	-1,90E-04	-5,70E-04	<b>-4,47E-01</b>	-9,90E-05	-9,20E-05	<b>-5,21E+00</b>	3,60E-04	3,70E-04	<b>3,43E-01</b>	-6,30E-06	-1,80E-04	<b>-8,65E-01</b>
p12	7,64E-05	5,62E-05	<b>2,77E+00</b>	-2,70E-04	-4,30E-05	<b>-6,52E+00</b>	-2,20E-05	1,60E-04	<b>1,01E+00</b>	-2,20E-03	-2,30E-03	<b>-8,27E-02</b>	-8,10E-05	-1,30E-04	<b>-1,32E+00</b>	1,40E-03	1,70E-03	<b>1,34E-01</b>
p13	-1,14E-04	-4,04E-04	<b>-1,75E+00</b>	-2,20E-03	-8,60E-04	<b>-1,61E+00</b>	1,40E-02	1,40E-02	<b>7,62E-02</b>	-3,20E-04	4,50E-04	<b>1,87E+00</b>	2,50E-03	3,40E-03	<b>2,49E-01</b>	6,70E-03	6,60E-03	<b>1,96E-01</b>
p14	-5,78E-04	-1,14E-03	<b>-1,09E+00</b>	2,50E-03	2,50E-03	<b>1,45E+00</b>	-2,20E-03	-2,10E-03	<b>-1,57E+00</b>	9,00E-03	8,50E-03	<b>1,90E-01</b>	-1,00E-03	-6,40E-04	<b>-2,29E+00</b>	1,10E-03	9,60E-04	<b>2,72E+00</b>
p15	2,08E-04	3,84E-04	<b>2,72E+00</b>	-2,40E-04	8,50E-04	<b>1,72E+00</b>	1,40E-03	9,20E-04	<b>1,19E+00</b>	1,20E-04	3,80E-05	<b>2,31E+01</b>	-3,60E-05	-1,80E-04	<b>-9,65E+00</b>	-3,20E-04	-2,10E-03	<b>-6,35E-01</b>
p16	1,80E-04	2,23E-04	<b>3,50E+00</b>	-3,60E-04	8,20E-04	<b>1,08E+00</b>	4,50E-04	3,40E-04	<b>2,87E+00</b>	2,40E-04	2,90E-04	<b>7,17E+00</b>	-1,90E-04	-1,70E-04	<b>-3,89E+00</b>	-2,90E-03	-4,90E-03	<b>-1,51E-01</b>
p17	7,84E-04	7,51E-04	<b>8,79E-01</b>	-7,40E-04	6,00E-04	<b>1,61E+00</b>	3,50E-03	3,40E-03	<b>2,28E-01</b>	-1,10E-03	-9,50E-04	<b>-1,03E+00</b>	-1,20E-02	-1,10E-02	<b>-6,65E-02</b>	3,20E-04	-2,30E-03	<b>-3,45E-01</b>
p18	1,52E-04	-5,26E-04	<b>-1,51E+00</b>	-1,40E-04	1,10E-03	<b>1,05E+00</b>	8,30E-03	6,70E-03	<b>3,30E-01</b>	-7,90E-04	1,10E-04	<b>5,45E+00</b>	6,80E-04	1,20E-05	<b>9,09E+01</b>	3,10E-03	1,80E-03	<b>4,35E-01</b>
p19	-4,48E-04	-8,80E-04	<b>-7,49E-01</b>	3,50E-04	2,20E-04	<b>5,24E+00</b>	1,10E-03	-2,40E-04	<b>-6,83E+00</b>	3,60E-03	3,30E-03	<b>1,47E-01</b>	-5,50E-04	-5,80E-04	<b>-5,09E+00</b>	1,40E-04	2,40E-04	<b>1,83E+00</b>
p20	-5,66E-04	-7,02E-04	<b>-7,24E-01</b>	-6,00E-04	-5,60E-04	<b>-1,18E+00</b>	2,10E-03	3,00E-03	<b>3,46E-01</b>	3,80E-04	3,80E-04	<b>5,42E+00</b>	-2,30E-03	-2,20E-03	<b>-4,05E-01</b>	3,10E-04	2,90E-04	<b>1,56E+00</b>
p21	-3,57E-04	-5,92E-04	<b>-7,09E-01</b>	3,30E-04	1,40E-04	<b>1,02E+01</b>	6,00E-04	9,60E-04	<b>1,35E+00</b>	1,50E-03	1,30E-03	<b>4,24E-01</b>	-3,80E-05	4,90E-04	<b>1,23E+00</b>	-8,30E-04	-2,40E-04	<b>-4,19E+00</b>
p22	-4,23E-04	-4,93E-04	<b>-3,63E-01</b>	1,50E-04	3,00E-04	<b>6,66E-01</b>	2,30E-03	2,10E-03	<b>1,49E-01</b>	-1,20E-04	1,60E-04	<b>8,03E-01</b>	-2,80E-04	-3,30E-04	<b>-1,43E+00</b>	3,90E-04	1,40E-04	<b>9,98E-01</b>
p23	-8,73E-05	-1,00E-04	<b>-3,66E+00</b>	-3,50E-05	-8,40E-06	<b>-3,25E+01</b>	3,10E-05	-2,80E-04	<b>-2,89E+00</b>	1,60E-04	1,60E-04	<b>5,82E+00</b>	-3,30E-05	6,40E-05	<b>1,62E+01</b>	1,30E-05	-4,20E-05	<b>-4,83E+00</b>
p24	4,15E-04	4,46E-04	<b>7,62E-01</b>	2,30E-04	2,50E-04	<b>2,06E+00</b>	2,80E-04	3,10E-04	<b>1,24E+00</b>	3,10E-05	7,30E-05	<b>3,67E+00</b>	1,80E-03	1,70E-03	<b>3,86E-01</b>	3,10E-04	-6,20E-04	<b>-7,97E-01</b>
p25	-6,83E-05	-1,48E-04	<b>-8,12E-01</b>	-8,70E-05	3,20E-05	<b>4,03E+00</b>	1,40E-03	1,20E-03	<b>1,74E-01</b>	9,60E-05	3,40E-05	<b>1,04E+01</b>	-9,80E-05	-1,10E-04	<b>-1,28E+00</b>	4,80E-04	3,00E-04	<b>3,46E-01</b>
p26	1,23E-04	1,56E-04	<b>1,93E+00</b>	3,60E-04	4,50E-04	<b>8,31E-01</b>	-1,80E-04	-3,50E-05	<b>-9,55E+00</b>	3,70E-04	3,90E-04	<b>2,13E+00</b>	-1,70E-04	-1,40E-04	<b>-1,75E+00</b>	-4,40E-04	-1,10E-03	<b>-3,59E-01</b>
p27	4,94E-04	5,61E-04	<b>2,18E-01</b>	-6,30E-04	-4,00E-04	<b>-4,82E-01</b>	5,90E-04	6,20E-04	<b>2,58E-01</b>	-2,40E-04	-2,60E-04	<b>-6,33E-01</b>	-1,70E-03	-1,60E-03	<b>-9,67E-02</b>	6,00E-04	2,30E-05	<b>7,82E+00</b>

LEGENDA:

Matriz Identidade

Matriz Diagonal

Incerteza Relativa Parâmetros