



EFEITOS DAS RECENTES ATUALIZAÇÕES DA EQUAÇÃO DE EDLÉN EM MEDIÇÕES INTERFEROMÉTRICAS DE COMPRIMENTO

P. A. Costa¹, R. S. França²

Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial, Duque de Caxias, Brasil,
¹pacosta@inmetro.gov.br, ²rsfranca@inmetro.gov.br

Resumo: Neste artigo serão apresentadas cinco diferentes versões da equação de Edlén para o índice de refração do ar. Esta comparação tem o objetivo de se detectar modificações no resultado final de desvio de comprimento de blocos padrão, referentes apenas ao uso de versões/metodologias diferentes para o cálculo de índice de refração do ar e sua contribuição sobre a incerteza global de medição.

Palavras chave: Equação de Edlén, incerteza de medição, refratividade.

1. INTRODUÇÃO

A equação de Edlén[2], publicada na sua primeira versão em 1966, tem a função de calcular o índice de refração do ar (n) baseada nas condições ambientais locais. Este tipo de medição possui uma grande importância, visto que em alguns tipos de trabalho, como medições interferométricas de comprimento ou em áreas como das telecomunicações o conhecimento do valor de n é imprescindível.

A equação proposta por Edlén[2] foi e é muito utilizada. Entretanto, com o avanço da tecnologia e das pesquisas e com as mudanças climáticas, o cálculo da refratividade do ar sofreu algumas modificações.

A primeira revisão da equação [3], feita por K. P. Birch e M. J. Downs em 1993 teve o intuito de atualizar a equação para o novo sistema internacional de unidades (SI) e para a nova escala internacional de temperatura, a ITS-90. Esta revisão também se fez necessária quanto às taxas de gases que compõem o ar atmosférico, que eram descritos por Edlén como constantes.

Em 1994 K. P. Birch e M. J. Downs lançaram uma nova versão[4] onde os valores de algumas constantes foram modificados.

Em 1996 Philip E. Ciddor publicou uma nova versão[5] que possui uma rotina de cálculo diferentes das utilizadas por Birch – Downs. Esta versão é projetada para a região do visível e do infravermelho próximo do espectro eletromagnético. Além disso, foi acrescentado ao cálculo, como variável ambiental, o valor da concentração de dióxido de carbono.

Em 1998 G Bönsch e E. Potulski publicaram uma outra versão[6] da equação de Edlén diferente das anteriores. Nesta versão é necessário o conhecimento da compressibilidade do ar seco e da densidade do ar.

Por fim, em 2002 Philip E. Ciddor lançou a última versão[7] que será mostrada neste artigo. O que difere esta versão da anterior é que não são utilizados valores padrão para a composição gasosa do ar.

Estas cinco versões serão comparadas com o objetivo de se conhecer a variação de resposta da leitura de comprimento de um bloco-padrão em função apenas da equação utilizada.

2. DESENVOLVIMENTO

A equação de Edlén (1) descrita no fim da página é a versão de Birch – Downs 1993[3]. Através dos valores das variáveis ambientais é possível calcular o índice de refração real do ar.

Nesta equação σ é o número de ondas (μm^{-1}), p é a pressão atmosférica (Pa), t é a temperatura ($^{\circ}\text{C}$) e R é a umidade relativa do ar (% HR).

Comparação entre as versões da Equação de Edlén através do recálculo

A comparação entre as diversas versões da equação de Edlén foi feita com 25 medições interferométricas de comprimento já anteriormente realizadas em um interferômetro Twyman Green (subclasse do interferômetro

$$(n-1) = \left\{ \begin{array}{l} \left[8342,13 + \frac{2406147}{130 - \sigma^2} + \frac{15998}{38,9 - \sigma^2} \right] \cdot \left[\frac{p}{96095,43} \right] \cdot \left[\frac{1 + (0,601 - 0,00972 \cdot t) \cdot p}{1 + 0,0036610 \cdot t} \right] \\ - \left[R \cdot (0,037345 - 0,000401 \cdot \sigma^2) \cdot (8,753 + 0,036588 \cdot t^2) \right] \end{array} \right\} \cdot 10^{-8} \quad (1)$$

de Michelson), com blocos padrão de 100 mm de diferentes fabricantes e materiais e em momentos distintos.

O valor 100 mm foi utilizado por se tratar do maior comprimento de medição do laboratório.

A importância de se utilizar o maior comprimento de bloco possível é devido ao efeito de variação do índice de refração ser dependente do comprimento do bloco.

As medições interferométricas de comprimento são realizadas usando a versão de 1993 de Birch-Downs [3] para os coeficientes da equação de cálculo do índice de refração do ar. A partir do código fonte que gerou o programa que faz, regularmente, o cálculo de índice de refração do ar das medições pôde-se acessar a sub-rotina responsável pela descrição das equações associadas ao cálculo do índice de refração do ar. Os testes foram realizados procedendo ao recálculo de todas as medidas dos blocos de 100 mm para cada versão da equação lançada na sub-rotina e se comparando o valor final de desvio de comprimento calculado das mesmas medidas realizadas sobre o mesmo bloco-padrão para cada versão da equação.

A tabela 1 apresenta os valores de desvio de comprimento (lm) das 25 medições dos blocos-padrão de 100 mm, usando estas cinco diferentes versões da equação para o cálculo do índice de refração do ar.

Tabela 1. Resultados de lm (μm)/p/ diferentes equações de Edlén

Birch-Downs 1993 [3]	Birch-Downs 1994 [4]	Bönsch 1998 [6]	Ciddor 1996 [5]	Ciddor 2002 [7]
-0,0414	-0,0390	-0,0374	-0,0394	-0,0394
-0,0348	-0,0328	-0,0308	-0,0328	-0,0328
-0,3120	-0,3100	-0,3100	-0,3100	-0,3100
0,1386	0,1406	0,1400	0,1406	0,1406
-0,0840	-0,0820	-0,0800	-0,0800	-0,0820
-0,1436	-0,1446	-0,1396	-0,1416	-0,1416
-0,1236	-0,1216	-0,1216	-0,1216	-0,1216
-0,1156	-0,1136	-0,1116	-0,1136	-0,1136
-0,1172	-0,1152	-0,1132	-0,1152	-0,1152
-0,0270	-0,0250	-0,0250	-0,0250	-0,0250
0,0010	0,0021	0,0041	0,0021	0,0021
-0,0365	-0,0345	-0,0325	-0,0345	-0,0345
0,0014	0,0034	0,0054	0,0034	0,0034
-0,1324	-0,1304	-0,1304	-0,1304	-0,1304
-0,1280	-0,1260	-0,1240	-0,1260	-0,1260
-0,4720	-0,4700	-0,4680	-0,4680	-0,4700
-0,4565	-0,4545	-0,4525	-0,4545	-0,4545
-0,2488	-0,2480	-0,2468	-0,2468	-0,2468
-0,2800	-0,2800	-0,2780	-0,2780	-0,2780
-0,3095	-0,3075	-0,3055	-0,3075	-0,3075
-0,3535	-0,3515	-0,3495	-0,3515	-0,3515
-0,0372	-0,0352	-0,0352	-0,0352	-0,0352
-0,0548	-0,0528	-0,0508	-0,0528	-0,0528
0,1076	0,1096	0,1116	0,1096	0,1096
0,0873	0,0893	0,0913	0,0893	0,0893

O valor de lm recalculado com as diversas versões da equação de Edlén mostrou grande coerência entre si, visto que a diferença entre as leituras está em centésimos da unidade micrometro (μm). A partir destes valores e das

incertezas de cada versão da equação, pôde-se realizar o erro normalizado entre a versão de Birch Downs[3], que é a equação utilizada para calibração e as demais. Lembrando-se que, para que os resultados estejam de acordo é necessário que o valor do erro normalizado menor que 1.

A tabela 2 apresenta o valor das incertezas de cada versão da equação de Edlén e a tabela 3 apresenta o valor do erro normalizado entre as medições.

Tabela 2. Incerteza das versões da equação de Edlén

Versão da equação	Incerteza máxima
Birch-Downs 1993 [3]	$1,0 \times 10^{-8}$
Birch-Downs 1994 [4]	$3,0 \times 10^{-8}$
Bönsch 1998 [6]	$5,0 \times 10^{-8}$
Ciddor 1996 [5]	$5,0 \times 10^{-8}$
Ciddor 2002 [7]	$5,0 \times 10^{-8}$

Tabela 3. Erro normalizado entre as versões da Equação de Edlén

Birch Downs[3] – Birch Downs 1993[4]	Birch Downs[3] – Bönsch[6]	Birch Downs[3] – Ciddor 1996[5]	Birch Downs[3] – Ciddor 2002[7]
-0,08	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,03	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,08	-0,04
0,03	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,08	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,08	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,03	-0,04	-0,04	-0,04
0,00	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,04	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04
-0,06	-0,08	-0,04	-0,04

Podemos constatar pelos testes apresentados na tabela 1 e através do resultado do erro normalizado apresentado na tabela 3, que praticamente inexistem variações relevantes nos valores de desvio de comprimento de cada bloco-padrão.

Comparação entre as versões de duas versões da Equação de Edlén utilizando o cálculo do site do Nist

O site do NIST possui uma página[8] que permite o cálculo “on-line” do índice de refração do ar, dadas as condições ambientais e comprimento de onda empregado como parâmetros de entrada, em duas das versões da

equação: a de Birch-Downs 1994[4] e a de Ciddor 1996[5]. Alguns conjuntos de valores foram alimentados e se constatou que ambas têm resultados praticamente idênticos dentro do âmbito dos comprimentos de onda da luz visível e dentro da variação habitual das variáveis ambientais no ambiente controlado do laboratório.

A seguir, encontra-se na tabela 4 a comparação feita no site do Nist.

Tabela 4. Comparação de n entre a versão Ciddor e Birch Downs

<i>NIST</i>	Ciddor		Edlén (Birch-Downs)		Diferenças
	n	$U(k=2)$	n	$U(k=2)$	
<u>Cores do Cd 114</u>					
red	1,0003	2,40E-08	1,0003	3,10E-08	2E-09
green	1,0003	2,40E-08	1,0003	3,10E-08	2E-09
blue	1,0003	2,40E-08	1,0003	3,10E-08	2E-09
violet	1,0003	2,40E-08	1,0003	3,10E-08	2E-09
$CO_2 = 450$					

Nota-se na tabela 4 que as diferenças são valores bastante pequenos e que está dentro incerteza indicada, comprovando que as versões podem, sem problema algum, serem utilizadas para estes fins.

Incertezas da equação de Edlén

As incertezas decorrentes da equação de Edlén se devem principalmente as incertezas dos equipamentos de medição das variáveis ambientais.

A equação relaciona temperatura, umidade relativa do ar, pressão atmosférica e, algumas, incluem ainda o valor de dióxido de carbono. Para tais leituras existem suas respectivas incertezas de medição.

A incerteza das componentes das variáveis ambientais se dá, basicamente, pelas componentes a seguir:

$$u_V = u_c + u_D + u_R$$

Onde, u_V é a incerteza da variável ambiental, u_c é a incerteza de calibração do instrumento, u_D a deriva do equipamento e u_R a incerteza devida à resolução do equipamento de medição da variável.

O coeficiente de sensibilidade destas incertezas se dá a partir da derivada parcial da equação de Edlén em relação à variável ambiental de interesse.

Sendo $f = (n-1) \times 10^8$, seguem abaixo os valores de coeficientes de sensibilidade da versão de Birch Downs[3].

Pressão atmosférica: $\frac{\partial f}{\partial p} = 0,002704 \text{ L / Pa}$

Umidade relativa do ar: $\frac{\partial f}{\partial R} = 0,008378 \text{ L / \%HR}$

Temperatura: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0,965796 \text{ L / }^\circ\text{C}$

3. CONCLUSÃO

A partir dos testes realizados, conclui-se que a utilização das diferentes versões da equação de Edlén para medição interferométrica de comprimento de blocos padrão de, pelo menos, até 100 mm utilizando comprimentos de onda do visível é coerente. Sendo assim, não existem problemas quanto à incerteza de medição por este motivo e, portanto qualquer uma das versões citadas no artigo pode ser utilizada para este fim.

AGRADECIMENTOS

P. A. Costa e R. S. França agradecem à equipe do Laboratório de Interferometria do Inmetro (Laint).

P. A. Costa agradece o suporte do CNPq/Projeto Prometro, processo n°. 183861/2010-8.

REFERÊNCIAS

1. Guia para a Expressão da Incerteza de medição 3ª edição, Rio de Janeiro: ABNT, INMETRO, 2003, 120p.
2. Edlén, B – “The refractive Index of Air” *Metrologia* 1966, 2, 71 – 80
3. Birch, K. P. and Downs, M. J – “An Updated Edlén Equation for the Refractive Index of Air” *Metrologia* 1993, 30, 155 – 162
4. Birch, K. P. and Downs, M. J. – “Correction to the Updated Edlén Equation for the Refractive Index of Air” *Metrologia*, 1994, 31, 315 – 316
5. Ciddor, P. E. – “Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared” *Appl. Opt.* 35, 1566 – 1573 (1996)
6. Bönsch, G. and Potulski, E. – “Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén’s formulae” *Metrologia*, 1988, 35, 133- 139
7. Ciddor, P. E. – “Refractive index of air: 3. The roles of CO₂, H₂O, and refractive virials” *Appl. Opt.* 41, 2292 – 2298 (2002)
8. <http://emtoolbox.nist.gov/wavelength/Edlen.asp>